ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-447-468

УДК 515.126.83

О непрерывных и липшицевых селекциях многозначных отображений, заданных системой неравенств

Рафик Агасиевич ХАЧАТРЯН

Ереванский государственный университет

0025, Армения, г. Ереван, ул. Алек Манукян, 1

Аннотация. Рассматривается многозначное отображение следующего вида

$$a(x) = \{y \in Y \mid f_i(x,y) \le 0,\ i \in I\}, \quad x \in X,$$

где $X \subset \mathbb{R}^m$ — компакт; $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт; градиенты $f'_{iy}(x,y)$, $i \in I$, функций $f_i(x,y)$ по y удовлетворяют условию Липшица на Y; I — конечное множество индексов. С использованием метода линеаризации доказаны теоремы существования непрерывных и липшицевых селекторов, проходящих через любую точку графика многозначного отображения a. Получены как локальные, так и глобальные теоремы. Приводятся примеры, подтверждающие существенность принятых предположений, а также примеры, иллюстрирующие применение полученных утверждений в оптимизационных задачах.

Ключевые слова: условие Липшица, многозначное отображение, непрерывные и липшицевые селекции, слабо выпуклое множество, проксимально гладкое множество

Для цитирования: *Хачатрян Р. А.* О непрерывных и липшицевых селекциях многозначных отображений, заданных системой неравенств // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 447–468. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-447-468

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-447-468

On continuous and Lipschitz selections of multivalued mappings given by systems of inequalities

Rafik A. KHACHATRYAN
Yerevan State University
1 Alex Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia

Abstract. We consider a multivalued mapping of the following form

$$a(x) = \{y \in Y \mid f_i(x, y) \le 0,\ i \in I\}, \quad x \in X,$$

where $X \subset \mathbb{R}^m$ is compact; $Y \subset \mathbb{R}^n$ is convex compact; the gradients $f'_{iy}(x, y)$, $i \in I$, of the functions $f_i(x, y)$ along y satisfy the Lipschitz condition on Y; I is a finite set of indices. Using the linearization method, existence theorems for continuous and Lipschitz selectors passing through any point of the graph of the multivalued mapping a are proved. Both local and global theorems are obtained. Examples are given that confirm the significance of the assumptions made, as well as examples illustrating the application of the obtained statements to optimization problems.

Keywords: Lipschitz condition, multivalued mapping, continuous and Lipschitz selections, weakly convex set, proximally smooth set

Mathematics Subject Classification: 58C06, 49J53.

For citation: Khachatryan R.A. On continuous and Lipschitz selections of multivalued mappings given by systems of inequalities. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 447–468. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-447-468 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение и основные понятия

Пусть заданы непустые множества $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, непустое конечное множество I и определены функции $f_i(x,y) : X \times Y \to \mathbb{R}^1$, $i \in I$. Рассмотрим систему неравенств

$$f_i(x,y) \le 0, \quad i \in I \tag{0.1}$$

с параметром $x \in X$ относительно неизвестного $y \in Y$.

Отображение, сопоставляющее точке $x \in X$ множество решений системы (0.1), обозначим через $a(x)$. Пусть $y_0 \in a(x_0)$. Однозначное отображение $y : X \to Y$ называется *селекцией многозначного отображения* a, *проходящей через точку* (x_0, y_0), если

$$y(x) \in a(x) \ \ \forall x \in X, \quad y(x_0) = y_0. \tag{0.2}$$

Многозначное отображение a называется *полунепрерывным снизу в точке* x_0, если для любой сходящейся последовательности $\{x_k\}$, $x_k \to x_0$, и любого $y_0 \in a(x_0)$ существует последовательность $\{y_k\}$, $y_k \in a(x_k)$, такая, что $y_k \to y_0$. Отображение a называется *непрерывным по Хаусдорфу в точке* x_0, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$a(x) \subseteq a(x_0) + B_\epsilon(0), \quad a(x_0) \subseteq a(x) + B_\epsilon(0), \quad \text{если } \|x - x_0\| < \delta.$$

Здесь и ниже $B_\epsilon(0) = \big\{x \in X \mid \|x\| < \epsilon\big\}$. *Графиком* отображения a называется множество $\mathrm{graf}(a) = \big\{(x,y) \in X \times Y \mid y \in a(x)\big\}$.

Пусть множество Y выпукло и замкнуто, а функции $f_i(x,y)$, $i \in I$ непрерывны по совокупности переменных и при любом фиксированном x выпуклы по y. Тогда, если для любого $\overline{x} \in X$ существует $\overline{y} \in Y$ такой, что $f_i(\overline{x}, \overline{y}) < 0$, $i \in I$, то отображение a с выпуклыми замкнутыми значениями полунепрерывно снизу (см. [1, с. 156]). Следовательно, по известной теореме Майкла [2] существует непрерывное отображение, удовлетворяющее условию (0.2). Отметим, что в настоящее время теорема Майкла обобщена на разные классы многозначных отображений с невыпуклыми значениями.

Замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *проксимально гладким* (*слабо выпуклым*) с константой R, если функция расстояния $r_M(x) = \inf_{a \in M} \|x - a\|$ непрерывно дифференцируема на множестве $U_M(R) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < r_M(x) < R\big\}$. Это условие эквивалентно единственности метрической проекции $P_M(x) = \big\{a \in M \mid \|x - a\| = r_M(x)\big\}$ для каждой точки $x \in U_M(R)$. Свойства таких множеств рассматривались разными авторами (см. [3–5]).

Замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *почти выпуклым с константой* $\eta \ge 0$, если для любых $\lambda_j \ge 0$, $j \in J$ (J — любое конечное множество индексов), таких, что $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$ и для любых $x_j \in M$, $j \in J$, выполнено

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j \in M + \eta \max_{i,j \in J} \|x_i - x_j\|^2 B_1(0).$$

В [6, теорема 3] доказано, что если множество M почти выпукло с константой $\eta > 0$, то оно проксимально гладко с константой $(16\eta)^{-1}$.

Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *звездным*, если существует точка $a \in M$ такая, что $[a,b] \subset M$ при любом $b \in M$.

Если значения многозначного отображения выпуклы, почти выпуклы или звездны, то исследованию условий существования непрерывных или липшицевых селекций для таких классов отображений посвящена многочисленная литература (в частности, условия существования непрерывных селекций многозначного отображения с звездными и почти выпуклыми значениями получены в [7, теорема 2]).

В [4] доказана следующая общая теорема о существовании непрерывных селекций многозначного отображения с слабо выпуклыми значениями.

Теорема 0.1 ([4, теорема 3.4.5]). *Пусть X — выпуклое подмножество в нормированном пространстве E, H — гильбертово пространство. Пусть задано многозначное отображение $a : X \to 2^H$, равномерно непрерывное в смысле метрики Хаусдорфа и такое, что для любого $x \in X$ множество $a(x)$ замкнуто и слабо выпукло с константой R. Тогда для любого $(x_0, y_0) \in \mathrm{graf}(a)$ существует непрерывный селектор y отображения a, удовлетворяющий условию $y(x_0) = y_0$.*

В [4, пример 3.4.2] демонстрируется существенность в теореме 0.1 условия выпуклости множества X. В этом примере множество X не выпукло, и хотя многозначное отображение a имеет слабо выпуклые замкнутые значения и липшицево, но тем не менее у него не существует непрерывного селектора на X.

В настоящей статье без предположения выпуклости функций f_i по y, но при дополнительном условии гладкости, означающем, что функции f_i имеют липшицев градиент f'_{iy} по y, доказаны теоремы существования непрерывных и липшицевых селекций для многозначного отображения вида (0.1), определенного на компактном множестве X (который может и не быть выпуклым) и имеющего слабо выпуклые значения. Доказательства теорем существования непрерывных селекций выполняются методом линеаризации (см. [8]). Полученные результаты иллюстрируются в примерах с обсуждением существенности условий теорем.

В дальнейшем через (a, b) обозначено скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$.

В [9] доказан следующий результат о существовании липшицевых селекций многозначного отображения вида (0.1).

Теорема 0.2 ([9, теорема 3.3]). *Пусть функции $f_i(x, y)$, $i \in I$, строго дифференцируемы по совокупности переменных в точке (x_0, y_0), и существует вектор $\overline{p} \in \mathbb{R}^n$ такой, что*

$$(f'_{iy}(x_0, y_0), \overline{p}) < 0, \quad i \in I. \tag{0.3}$$

Тогда существует определенное в некоторой окрестности $V(x_0)$ точки x_0 липшицево отображение $y(x)$ такое, что

$$f_i(x, y((x)) \leq 0 \ \ \forall x \in V(x_0), \quad i \in I, \quad y(x_0) = y_0.$$

В настоящей статье доказан аналогичный результат без предположения строгой дифференцируемости функций f_i, $i \in I$, по совокупности переменных (x, y). Поскольку условие (0.3) будет существенным в дальнейших теоремах настоящей статьи, заметим, что оно имеет место только тогда, когда (см. [10, гл 4, теорема 1.9]) не существует таких $\lambda_i \geq 0$, $i \in I$, не всех равных нулю, что

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f'_{iy}(x_0, y_0) = 0.$$

.

Полученные в настоящей статье результаты также можно интерпретировать как теоремы о неявной функции для систем неравенств, они могут быть применены в вопросах существования решений дифференциальных включений вида

$$f_i(y, y') \leq 0, \quad y(t) \in Y, \quad i \in I, \quad t \in T,$$

где T — отрезок числовой прямой (см. [11]).

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим $\mathrm{bdry}(M)$ — границу, $\mathrm{diam}(M) = \sup_{x,y \in M} \|x - y\|$ — диаметр и $\mathrm{cl}(M)$ — замыкание этого множества.

1. Липщицевые селекции многозначного отображения a

Лемма 1.1. *Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности $V(x_0) \times U(y_0)$ точки (x_0, y_0), и ее градиент $f'_y(x, y)$ по y удовлетворяет условию Липшица равномерно относительно параметра $x \in V(x_0)$, т. е. существует число $L > 0$ такое, что*

$$|f'_y(x, y_1) - f'_y(x, y_2)| \leq L\|y_1 - y_2\| \ \ \forall x \in V(x_0) \ \ \forall y_1, y_2 \in U(y_0).$$

Тогда для любых $x \in V(x_0)$, $y_1, y_2 \in U(y_0)$ имеет место неравенство

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2) - (f'_y(x, y_2), y_1 - y_2)| \leq \frac{L}{2}\|y_1 - y_2\|^2. \tag{1.1}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству [12, лемма 1.2.3], и поэтому здесь не приводится.

З а м е ч а н и е 1.1. Условие (1.1) выполняется, если функция $f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по y на множестве $V(x_0) \times U(y_0)$.

Лемма 1.2. *Пусть выполнены предположения леммы 1.1. Тогда для любых $x \in V(x_0)$, $y_1, y_2 \in U(y_0)$ имеет место неравенство:*

$$f(x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \leq \lambda f(x, y_1) + (1-\lambda) f(x, y_2) + \lambda(1-\lambda)\frac{L}{2}\|y_1 - y_2\|^2. \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении предположения леммы 1.1 справедливо неравенство (1.1). Для любых $y_1, y_2 \in U(y_0)$, $\lambda \in [0, 1]$ положим

$$y^* = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in U(y_0).$$

Имеем

$$f(x, y_1) - f(x, y^*) \geq (f'_y(x, y^*), y_1 - y^*) - \frac{L}{2}\|y_1 - y^*\|^2,$$

$$f(x, y_2) - f(x, y^*) \geq (f'_y(x, y^*), y_2 - y^*) - \frac{L}{2}\|y_2 - y^*\|^2.$$

Заметим, что

$$\|y_1 - y^*\| = (1-\lambda)\|y_1 - y_2\|, \quad \|y_2 - y^*\| = \lambda\|y_1 - y_2\|.$$

Тогда, умножая первое неравенство на λ, второе — на $(1-\lambda)$ и складывая их, получаем

$$\begin{aligned} \lambda f(x, y_1) + (1-\lambda) f(x, y_2) - f(x, y^*) + \frac{L}{2}\|y_1 - y_2\|^2 \\ \geq (f'_y(x, y^*), \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 - y^*) = 0, \end{aligned}$$

т. е неравенство (1.2) доказано. □

З а м е ч а н и е 1.2. Функции, удовлетворяющие условию (1.2), в работе [4] называются слабо выпуклыми по y. А согласно [5, теорема 5.2] надграфик функции $f(x,\cdot)$ является проксимально гладким множеством.

Опишем несколько подробнее свойства функции $f(x,\cdot)$, удовлетворяющей условию (1.2). Сначала по индукции покажем, что справедливо следующее неравенство

$$f(x,\sum_{j\in J}\lambda_j y_j) \le \sum_{j\in J}\lambda_j f(x,y_i) + \frac{L}{2}\max_{i,j\in J}\|y_i-y_j\|^2, \tag{1.3}$$

где $y_j\in U(y_0)$, $\lambda_j\ge 0$, $j\in J$, $\sum_{j\in J}\lambda_j=1$, J — произвольное конечное множество индексов, т. е. $J=\{1,2,\dots,k\}$. При $k=2$ неравенство (1.3) непосредственно следует из (1.2). Допустим, что неравенство (1.3) имеет место при $k=p$. Покажем, что оно имеет место и для значения $k=p+1$. Имеем

$$\begin{aligned} f\Big(x,\sum_{k=1}^{p+1}\lambda_k y_k\Big) &= f\Big(x,\sum_{k=1}^{p}\lambda_k y_k+\lambda_{p+1}y_{p+1}\Big) = f\Big(x,(1-\lambda_{p+1})\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{p+1}}y_k+\lambda_{p+1}y_{p+1}\Big)\\ &\le (1-\lambda_{p+1})f\Big(x,\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{p+1}}y_k\Big)+\lambda_{p+1}f(x,y_{p+1})+\\ &\qquad \lambda_{p+1}(1-\lambda_{p+1})\frac{L}{2}\|\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{p+1}}y_k-y_{p+1}\|^2\\ &\le \sum_{k=1}^{p+1}\lambda_k f(x,y_k)+(1-\lambda_{p+1})\frac{L}{2}\max_{i,j\in[1;p]}\|y_i-y_j\|^2+\lambda_{p+1}(1-\lambda_{p+1})\frac{L}{2}\sum_{k=1}^{p}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{p+1}}\|y_k-y_{p+1}\|^2\\ &\le \sum_{k=1}^{p+1}\lambda_k f(x,y_k)+\frac{L}{2}\max_{i,j\in[1;p+1]}\|y_i-y_j\|^2. \end{aligned}$$

Теперь пусть непрерывная функция $f(x,\cdot)$ определена на замкнутом выпуклом множестве $M\in\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию (1.3)). Тогда, как показано в [13, лемма 2], надграфик этой функции является почти выпуклым множеством с константой $\frac{L}{2}$ и, следовательно, проксимально гладким с константой $\frac{1}{8L}$ (см. [6, теорема 3]).

Отметим также условие (1.2) слабой выпуклости функции $f(x,\cdot)$ с константой L эквивалентно тому, что функция $f(x,y)+\frac{L}{2}\|y\|^2$ выпукла по y.

Лемма 1.3. *Пусть*

1) Y — выпуклый компакт, $f_i(x_0,y_0)\le 0$, $i\in I$, $y_0\in Y$;

2) градиенты $f'_{iy}(x,y)$, $i\in I$, непрерывны по совокупности переменных (x,y), и существует число $L_1>0$ такое, что при всех $i\in I$

$$\|f'_{iy}(x,y_1)-f'_{iy}(x,y_2)\|\le L_1\|y_1-y_2\| \quad \forall x\in V(x_0)\quad \forall y_1,y_2\in U(y_0);$$

3) найдется вектор $\overline{y}\in Y$ такой, что

$$\big(f'_{iy}(x_0,y_0),\overline{y}-y_0\big)<0,\quad i\in I(x_0,y_0),$$

где $I(x_0,y_0)=\big\{i\in I\mid f_i(x_0,y_0)=0\big\}$;

4) существует число $L_2 > 0$ *такое, что при всех* $i \in I$

$$\bigl|f_i(x_1, y) - f_i(x_2, y)\bigr| \le L_2\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in V(x_0) \quad \forall y \in U(y_0).$$

Тогда существует липшицево отображение $y(x)$, *определенное в некоторой окрестности* $\overline{V}(x_0)$ *точки* x_0 *такое, что* $y(x_0) = y_0$ *и при всех* $x \in \overline{V}(x_0)$ *выполнено*

$$f_i(x, y(x)) \le 0, \quad i \in I \quad \text{и} \quad y(x) \in Y \cap U(y_0). \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\overline{p} = \overline{y} - y_0$. Согласно неравенству (1.1) для достаточно малого положительно $\alpha > 0$ имеем

$$f_i(x_0, y_0 + \alpha\overline{p}) + \alpha^2\frac{L_1}{2}\|\overline{p}\|^2 \le f_i(x_0, y_0) + \bigl(f'_{iy}(x_0, y_0), \alpha\overline{p}\bigr) + \alpha^2 L_1\|\overline{p}\|^2, \quad i \in I.$$

Отсюда и из предположений 1) и 3) следует, что существует число $\alpha_0 \in (0,1)$ такое, что

$$f_i(x_0, y_0 + \alpha_0\overline{p}) + \frac{L_1}{2}\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 < 0, \quad i \in I.$$

Поэтому, так как функции f_i непрерывны по x, существует замкнутая окрестность $V_1(x_0)$ точки x_0 такая, что

$$f_i(x, y_0 + \alpha_0\overline{p}) + \frac{L_1}{2}\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 < 0 \ \ \forall x \in V_1(x_0), \quad i \in I.$$

Значит, существует число $\beta > 0$ такое, что

$$f_i(x, y_0 + \alpha_0\overline{p}) + \frac{L_1}{2}\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 \le -\beta \ \ \forall x \in V_1(x_0), \quad i \in I.$$

Отсюда для любых $i \in I$, $x \in V_1(x_0)$, $\lambda \in [0,1]$ имеем

$$\begin{aligned} f_i\bigl(x, (1-\lambda)y_0 + \lambda(y_0 + \alpha_0\overline{p})\bigr) &\le (1-\lambda)f_i(x, y_0) + \lambda f_i(x, y_0 + \alpha_0\overline{p}) + \frac{L_1}{2}\lambda(1-\lambda)\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 \\ = (1-\lambda)f_i(x_0, y_0) + (1-\lambda)[f_i(x, y_0 &- f_i(x_0, y_0)] + \lambda f_i(x, y_0 + \alpha_0\overline{p}) + \frac{L_1}{2}\lambda(1-\lambda)\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 \\ \le L_2\|x - x_0\| + \lambda f_i(x, y_0 &+ \alpha_0\overline{p}) + \frac{L_1}{2}\lambda(1-\lambda)\alpha_0^2\|\overline{p}\|^2 \le L_2\|x - x_0\| - \beta\lambda. \end{aligned}$$

Теперь выберем число λ так, что правая часть заключительного неравенства равняется нулю, т. е. положим

$$\lambda = \frac{L_2}{\beta}\|x - x_0\|. \tag{1.5}$$

Отсюда видно, что если разность $\|x - x_0\|$ достаточно мала, то λ, определяемое формулой (1.5), лежит в промежутке $[0,1]$, так что приведенные выше выкладки корректны. Положим

$$y(x) = y_0 + \lambda\alpha_0\overline{p}.$$

Очевидно, что при $x = x_0$ имеем $\lambda = 0$ и, следовательно, $y(x_0) = y_0$.

Окончательно получаем, что $y(x_0) = y_0$, и существует окрестность $\overline{V}(x_0)$ точки x_0 такая, что для всех при всех $x \in \overline{V}(x_0)$ выполнено (1.4). $\square$

Теперь приведем пример, показывающий, что условие 3) леммы 1.3 существенно, и если это условие не выполняется, то вывод леммы 1.3 может быть неверным.

П р и м е р 1.1. Пусть $x \in \mathbb{R}^1$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = (\bar{y}_1, 0)$, где $\bar{y}_1 \in [0, \frac{1}{\pi}]$, $Y = \big\{(y_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \in [0, \frac{1}{\pi}]\big\}$. Пусть функция f определена соотношением

$$f(x,y) \equiv f(x, y_1, y_2) = \begin{cases} xy_1^4 sin\frac{1}{y_1} - y_2, & \text{если } y_1 \neq 0, \\ -y_2 & \text{если } y_1 = 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что для этой функции выполнены предположения 1), 2) и 4) леммы 1.3. Проверим третье условие. Имеем $f'_{y_1}(0, y_1, 0) = 0$, $f'_{y_2}(0, y_1, 0) = -1$. Следовательно, для любого $y \in Y$ имеем равенство $(f'_y(0, \bar{y}_1, 0), y - y_0) = 0$, т. е. условие 3) не выполняется. Имеем также

$$a(x) \equiv \big\{y \in Y \mid f(x,y) \le 0\big\} = \begin{cases} Y, & \text{если } x = 0, \\ Z, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

где

$$Z = \Big\{(y_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \in \Big\{0, \frac{1}{\pi}\Big\} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2\pi k}\Big]\Big\}.$$

Следует отметить, что при $x > 0$ множество $a(x)$ не является проксимально гладким.

В случае, когда $(\bar{y}_1, 0) \notin a(x)$ ($x > 0$), легко заметить, что через соответствующую точку $(x_0, y_0) = (0, \bar{y}_1, 0) \in \mathrm{graf}(a)$ не проходят непрерывные селекции отображения a.

В дальнейшем положим

$$I(x,y) \equiv \big\{i \in I \mid f_i(x,y) = 0\big\}, \quad A(x) \equiv \big\{y \in a(x) \mid f_i(x,y) = 0, \quad i \in I(x,y)\big\}. \tag{1.6}$$

Лемма 1.4. *Пусть*

1) $X \subset \mathbb{R}^m$ *— компакт,* $Y \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклый компакт;*

2) для любых $x \in X$ *и* $y \in A(x)$ *существует вектор* $z \in Y$ *такой, что*

$$\big(f'_{iy}(x,y), z - y\big) < 0, \quad i \in I(x,y).$$

Тогда существует непрерывное отображение $D : \mathrm{graf}(A) \to Y$ *такое, что при любых* $x \in X$ *и* $y \in A(x)$ *выполнено*

$$\big(f'_{iy}(x,y), D(x,y) - y\big) < 0, \quad i \in I(x,y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$u = (x,y) \in \mathrm{graf}(A), \quad \psi(u,z) = \max_{i \in I(x,y)} \big(f'_{iy}(x,y), z - y\big).$$

По предположению для любого $u \in \mathrm{graf}(A)$ существует вектор $z(u) \in Y$ такой, что $\psi(u, z(u)) < 0$. Так как функция ψ полунепрерывна сверху, то для любого $\delta > 0$ существует окрестность $B_{\eta(u)}(u)$ точки u такая, что

$$\psi(v, z(u)) \le \psi(u, z(u)) + \delta \ \ \forall v \in B_{\eta(u)}(u).$$

Поскольку множество $\mathrm{graf}(A)$ компактно, оно может быть покрыто шарами $B_{\eta(u_j)}(u_j)$, $j \in J$, где J — конечное множество индексов. Пусть g_j $(j \in J)$ — непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому разбиению. Определим функцию $D(u)$ по следующему правилу:

$$D(u) = \sum_{j \in J} g_j(u) z(u_j).$$

Так как

$$g_j(u) \geq 0, \quad \sum_{j \in J} g_j(u) = 1$$

и функция $\psi(u, z)$ выпукла по z, имеем

$$\psi(u, D(u)) \leq \sum_{j \in J(u)} g_j(u) \psi(u, z(u_j)),$$

где $J(u) = \{j \in J : g_j(u) > 0\}$.

Известно также, что если $g_j(u) > 0$, то $u \in B_{\eta(u_j)}(u_j)$ и, следовательно, для достаточно малых $\delta > 0$ верно неравенство

$$\psi(u, z(u_j)) \leq \psi(u_j, z(u_j)) + \delta < 0.$$

Значит,

$$\psi(u, D(u)) \leq \sum_{j \in J(u)} g_j(u) \psi(u, z(u_j)) < 0, \quad u \in \mathrm{graf}(A).$$

□

Теорема 1.1 (1-я теорема о липшицевой селекции)**.** *Пусть*

1) *функции $f_i(x, y)$, $i \in I$, заданы на $X \times \Omega \subset \mathbb{R}^{m+n}$, где $X \subset \mathbb{R}^1$ — отрезок числовой прямой и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $Y \subset \Omega$ — выпуклый компакт;*

2) *градиенты $f'_{iy}(x, y)$, $i \in I$, непрерывны по совокупности переменных $(x, y) \in X \times \Omega$, и существует число $L_1 > 0$ такое, что*

$$\|f'_{iy}(x, y_1) - f'_{iy}(x, y_2)\| \leq L_1 \|y_1 - y_2\| \quad \forall x \in X \quad \forall y_1, y_2 \in Y, \quad i \in I;$$

3) *существует число $L_2 > 0$ такое, что*

$$|f_i(x_1, y) - f_i(x_2, y)| \leq L_2 \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \forall y \in Y, \quad i \in I;$$

4) *для любых (x, y) $\big(y \in A(x)\big)$ существует вектор $z \in Y$ такой, что*

$$\big(f'_{iy}(x, y), z - y\big) < 0, \quad i \in I(x, y);$$

5) *$a(x) \neq \emptyset$ для любого $x \in X$.*

Тогда через любую точку $(x_0, y_0) \in \mathrm{graf}(a)$ проходит липшицева селекция этого отображения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем, что многозначное отображение a является липшицевым на X.

Если $\operatorname{graf}(A) \neq \emptyset$, то согласно лемме 1.4 существует непрерывное отображение $D : \operatorname{graf}(A) \to Y$ такое, что

$$\psi(u, D(u) - y) < 0 \ \ \forall u = (x, y) \in \operatorname{graf}(A).$$

Отсюда существует число $\gamma > 0$ такое, что

$$\max_{u \in \operatorname{graf}(A)} \psi(u, D(u) - y) \leq -\gamma < 0.$$

Определим непрерывное продолжение $\tilde{D} : \operatorname{graf}(a) \to Y$ отображения D (согласно известной теореме Титце–Дугунжи такое непрерывное продолжение существует). Поскольку функция

$$\varphi(x, y) \equiv \max_{i \in I(x,y)} \big(f'_{iy}(x, y), \tilde{D}(x, y) - y\big)$$

полунепрерывна сверху, существует Δ-окрестность $(\operatorname{graf}(A))_\Delta$ множества $\operatorname{graf}(A)$ такая, что

$$\max_{i \in I(x,y)} \big(f'_{iy}(x, y), \tilde{D}(x, y) - y\big) \leq -\frac{\gamma}{2} \ \ \forall (x, y) \in (\operatorname{graf}(A))_\Delta \cap \operatorname{graf}(a).$$

Положим $F(x, y) \equiv \max_{i \in I} f_i(x, y)$. Теперь согласно неравенству (1.1) существуют числа $\alpha \in (0, 1)$ и $\gamma_1 > 0$ такие, что для всех $(x, y) \in (\operatorname{graf}(A))_\Delta \cap \operatorname{graf}(a)$

$$\begin{aligned} F\big(x, y + \alpha(\tilde{D}(x, y) - y)\big) + \alpha^2 L_1 \|\tilde{D}(x, y) - y\|^2 \\ \leq F(x, y) + \alpha\Big[\max_{i \in I(x,y)} \big(f'_{iy}(x, y), \tilde{D}(x, y) - y\big) + \alpha^2 \frac{3L_1}{2} \|\tilde{D}(x, y) - y\|^2\Big] \\ \leq F(x, y) + \alpha\Big[-\gamma + \alpha \frac{3L_1}{2} \|\tilde{D}(x, y) - y\|^2\Big] \leq -\gamma_1 < 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $(x_1, y_1) \in (\operatorname{graf}(A))_{\Delta/2} \cap \operatorname{graf}(a)$. Так как выполнены предположения леммы 1.3, отображение a непрерывно в любой точке $x \in X$. А так как множества $a(x)$ — непустые компакты, отсюда следует, что многозначное отображение a равномерно непрерывно по Хаусдорфу на X. Поэтому для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $x_2 \in X$ таком, что $\|x_1 - x_2\| < \delta$, найдется $y_2 \in a(x_2)$ такое, что $\|y_1 - y_2\| < \epsilon$. Учитывая это, мы можем считать, что $(x_2, y_2) \in \big(\operatorname{graf}(a)\big)_\Delta$.

Теперь, учитывая неравенство (1.7) и условие 3) теоремы, для $\lambda \in [0, 1]$ получаем

$$\begin{aligned} F(x_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda\big(y_2 + \alpha(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2)\big) \leq (1 - \lambda)F(x_2, y_1) \\ + \lambda F\big(x_2, y_2 + \alpha(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2)\big) + \alpha^2 L_1 \lambda(1 - \lambda)\|\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\|^2 + L_1\lambda(1 - \lambda)\|y_2 - y_1\|^2 \\ = (1 - \lambda)F(x_1, y_1) + (1 - \lambda)[F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)] + \lambda F\big(x_2, y_2 + \alpha\big(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\big)\big) \\ + \alpha^2 L_1 \lambda(1 - \lambda)\|\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\|^2 + L_1\lambda(1 - \lambda)\|y_2 - y_1\|^2 \leq L_2\|x_2 - x_1\| \\ + \lambda F\big(x_2, y_2 + \alpha\big(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\big)\big) + \alpha^2 L_1\lambda(1 - \lambda)\|\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\|^2 + L_1\lambda(1 - \lambda)\|y_2 - y_1\|^2 \\ \leq L_2\|x_1 - x_2\| - \lambda\gamma_1 + L_1\lambda(1 - \lambda)\|y_2 - y_1\|^2 \leq L_2\|x_1 - x_2\| - \lambda(\gamma_1 - L_1\epsilon^2). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Выберем число $\epsilon > 0$ так, что $\gamma_1 > L_1\epsilon^2$. Затем выберем $\lambda > 0$ так, чтобы правая часть неравенства (1.8) стала равной нулю. Для значения λ получим

$$\lambda = \frac{L_2}{\gamma_2}\|x_1 - x_2\|, \quad \text{где} \quad \gamma_2 = \gamma_1 - L_1\epsilon^2. \tag{1.9}$$

Рассмотрим теперь второй случай, т. е. пусть $(x_1, y_1) \in \mathrm{graf}(a)$ и $(x_1, y_1) \notin (\mathrm{graf}(A))_{\Delta/2}$. Так как для некоторого положительного числа $\tau > 0$ имеет место неравенство

$$F(x, y) \le -\tau \ \ \forall (x, y) \in \mathrm{graf}(a), \quad (x, y) \notin (\mathrm{graf}(A))_{\Delta/2},$$

то $F(x_1, y_1) < -\tau$. Проводя для этого случая те же рассуждения, что при выводе неравенства (1.8), получаем

$$\begin{aligned} &F(x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda\bigl(y_2 + \alpha\bigl(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\bigr)\bigr) \\ &\le L_2\|x_2 - x_1\| + \lambda F\bigl(x_2, y_2 + \alpha(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2)\bigr) + \alpha^2 L_1 \lambda(1-\lambda)\|\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\|^2 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + L_1\lambda(1-\lambda)\|y_2 - y_1\|^2 + (1-\lambda)F(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Поскольку число λ определяется по формуле (1.9) и $F(x_1, y_1) < -\tau < 0$, для точки x_2, достаточно близкой к x_1, правая часть полученного неравенства будет отрицательной. Положим

$$\tilde{y_2} = y_1 + \frac{L_2}{\gamma_2}\|x_1 - x_2\|\bigl(y_2 + \alpha\bigl(\tilde{D}(x_2, y_2) - y_2\bigr) - y_1\bigr). \tag{1.10}$$

Таким образом, любой точке $y_1 \in a(x_1)$ можно поставить в соответствие точку $\tilde{y_2} \in a(x_2)$ по формуле (1.10). Для этих точек выполнено

$$\|y_1 - \tilde{y_2}\| \le \frac{2L_2}{\gamma_2}\mathrm{diam}(Y)\|x_1 - x_2\| = L_3\|x_1 - x_2\|, \ \text{где}\ L_3 = \frac{2L_2}{\gamma_2}\mathrm{diam}(Y).$$

Отметим, что если величина $\|x_1 - x_2\|$ достаточно мала, то $\lambda \in [0, 1]$, и поэтому приведенные выше выкладки корректны.

Итак, отображение a локально липшицево на достаточно малых окрестностях всех точек из X с одной и той же константой. Следовательно, оно липшицево на всем компакте X. Поэтому согласно теореме Д.18 из [14, с. 329] через любую точку $y_0 \in a(x_0)$ проходит липшицева селекция многозначного отображения a. □

Следующий пример показывает существенность условия 4) теоремы 1.1.

П р и м е р 1.2. Пусть $X = [-1, 1]$; $Y \subset \mathbb{R}^2$ — квадрат с вершинами $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$;

$$f(x, y_1, y_2) \equiv x_1 y_2 y_2, \quad x \in X, \quad (y_1, y_2) \in Y;$$

$$a(x) \equiv \bigl\{y \in Y \mid f(x, y_1, y_2) \le 0\bigr\}.$$

Очевидно, $a(0) = Y$. А если $x > 0$, то множество $a(x)$ является пересечением второй и четвертой четвертей плоскости с квадратом Y. При $x < 0$ множества $a(x)$ есть пересечение первой и третьей четвертей с квадратом Y. Так как $f'_{y_1}(0, y_1, y_2) = f'_{y_2}(0, y_1, y_2) = 0$, то условие 4) теоремы 1.1 не выполняется в точках $(0, y_1, y_2) \in \mathrm{graf}(a)$.

Заключая рассмотрение этого примера, заметим, что

1) отображение a не является непрерывным в нуле;

2) множества $a(x)$ при $x \ne 0$ не являются проксимально гладкими;

3) через любую точку $(y_1^0, y_2^0) \in a(0)$ (точка (y_1^0, y_2^0) не принадлежит координатным осям) не проходят непрерывные селекции отображения a.

Теорема 1.2 (2-я теорема о липшицевой селекции). *Пусть*

1) X — отрезок числовой прямой, $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт;

2) для любого фиксированного $x \in X$ функция $F(x,y)$ является проксимально гладкой по y с константой L_1 на Y;

3) для любого $x \in X$ существует $z \in Y$ такой, что

$$F(x,z) + \frac{L_1}{2}(\mathrm{diam}(Y))^2 < 0;$$

4) существует число $L_2 > 0$ такое, что

$$\|F(x_1,y) - F(x_2,y)\| \le L_2\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \forall y \in Y.$$

Тогда через любую точку $(x_0,y_0) \in \mathrm{graf}(a) = \big\{(x,y) \in X \times Y \mid F(x,y) \le 0\big\}$ проходит липшицева селекция отображения a.

Доказательство. Сначала отметим, что существует непрерывное отображение $D : X \to Y$ такое, что

$$F(x, D(x)) < -\frac{L_1}{2}(\mathrm{diam}(Y))^2 \quad \forall x \in X.$$

Это неравенство можно получить, повторив доказательство леммы 1.4 с использованием неравенства (1.3).

Далее, если $y_1 \in a(x_1)$, т. е. $F(x_1,y_1) \le 0$, то при $\lambda \in [0,1]$ получаем

$$\begin{aligned} F\big(x_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda D(x_2)\big) &\le (1-\lambda)F(x_2,y_1) + \lambda F(x_2, D(x_2)) + \lambda(1-\lambda)\frac{L_1}{2}\|D(x_2) - y_1\|^2 \\ &= (1-\lambda)F(x_1,y_1) + (1-\lambda)[F(x_2,y_1) - F(x_1,y_1)] \\ &+\lambda\Big[F(x_2,D(x_2)) + (1-\lambda)\frac{L_1}{2}\|D(x_2)-y_1\|^2\Big] \le L_2\|x_1 - x_2\| + \lambda\gamma, \end{aligned}$$

где $\gamma = \max_{x\in X} F(x, D(x)) + \frac{L_1}{2}(\mathrm{diam}(Y))^2 < 0$. Положим

$$\lambda = -\frac{L_2}{\gamma}\|x_1 - x_2\|$$

и выберем x_2 так, чтобы норма $\|x_1 - x_2\|$ была настолько малой, что $\lambda < 1$. Таким образом, любой точке $y_1 \in a(x_1)$ можно поставить в соответствие точку $y_2 \in a(x_2)$ по следующей формуле

$$y_2 = y_1 + \frac{L_2}{\gamma}\|x_1 - x_2\|\big(D(x_2) - y_1\big).$$

Отсюда, для некоторого L_3 получим

$$\|y_2 - y_1\| \le \frac{L_2}{-\gamma}\|D(x_2) - y_1\|\|x_1 - x_2\| \le L_3\|x_1 - x_2\|.$$

Таким образом, отображение a локально липшицево на достаточно малых окрестностях всех точек из X с одной и той же константой. Следовательно, это отображение липшицево на всем компакте X. Согласно теореме Д.18 из [14, с. 329] через любую точку $y_0 \in a(x_0)$ проходит липшицева селекция отображения a. □

Следствие 1.1. *Пусть*

1) X — отрезок числовой прямой, $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт;

2) при любом фиксированном $x \in X$ функция $g(x, y)$ непрерывна и выпукла по y на выпуклом компакте Y;

3) существует число L_2 такое, что

$$\|g(x_1, y) - g(x_2, y)\| \le L_2\|x_1 - x_2\| \quad \forall y \in Y \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

При любом $\beta > 0$ определим функцию

$$f(x, y) = g(x, y) - \frac{\beta}{2}\|y\|^2$$

и для произвольного $\epsilon > 0$ зададим множество точек ϵ-минимума функции $f(x, \cdot)$ на Y формулой

$$a_\epsilon(x) = \bigl\{y \in Y \mid f(x, y) \le \min_{y \in Y} f(x, y) + \epsilon\bigr\}.$$

Тогда для достаточно малых $\beta > 0$ через любую точку графика отображения a_ϵ проходит липшицева селекция этого отображения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого фиксированного $x \in X$ функция

$$Q(x, y) \equiv f(x, y) - \min_{y \in Y} f(x, y) - \epsilon$$

слабо выпукла с константой β. Очевидно, для любого $x \in X$ существует точка $z \in Y$ такая, что $Q(x, z) \le -\epsilon$. Поэтому для достаточно малых $\beta > 0$ имеем

$$Q(x, z) < -\frac{\beta}{2}(\mathrm{diam}(Y))^2.$$

Функция $V(x) \equiv \min_{y \in Y} f(x, y)$ липшицева и, следовательно, относительно функции Q выполнены предположения вышеуказанной теоремы Д.18 из [14, с. 329]. Таким образом, утверждение данного следствия непосредственно вытекает из этой теоремы. □

2. Непрерывные селекции многозначного отображения a

Имеет место следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены предположения 1)–3) леммы 1.3. Тогда многозначное отображение a непрерывно в точке x_0.*

Доказательство этого факта аналогично доказательству леммы 1.3.

Теорема 2.1 (1-я теорема о непрерывной селекции)**.** *Пусть*

1) *$X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые компакты;*

2) *функции $f_i(x, y)$, $i \in I$, заданы на $X \times \mathbb{R}^n$, и существует компакт $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такой, что при всех $i \in I$ для множества $a_i(x) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x, y) \le 0\}$ выполнено* $\mathrm{bdry}(a_i(x)) \subset \Omega \;\; \forall x \in X$;

3) *градиенты* $f'_{iy}(x,y)$, $i\in I$ *непрерывны по совокупности переменных на* $X\times\mathbb{R}^n$ *и удовлетворяют условию Липшица по* y *на множестве* Y *равномерно относительно* $x\in X$, *т. е. существует число* $L_1>0$ *такое, что*

$$\|f'_{iy}(x,y_1)-f'_{iy}(x,y_2)\|\le L_1\|y_1-y_2\|\quad\forall x\in X\quad\forall y_1,y_2\in Y,\quad i\in I,$$

причем $f'_{iy}(x,y)\ne 0$, $x\in X$, $y\in \operatorname{bdry}(a_i(x))$;

4) *для любых* $(x,y)\in\operatorname{graf}(A)$, *где отображение* A *определено соотношениями* (1.6), *существует* $z\in Y$ *такой, что*

$$\big(f'_{iy}(x,y),z-y\big)<0,\quad i\in I(x,y).$$

Тогда при всех $x\in X$ *множества* $a(x)$ *слабо выпуклы с одной и той же константой и через любую точку* $(x_0,y_0)\in\operatorname{graf}(a)$ *проходит непрерывная селекция многозначного отображения* a.

Доказательство. Сначала покажем, что множества $a_i(x)$, $x\in X$, $i\in I$, являются слабо выпуклыми с одной и той же константой.

Согласно условию 2) доказываемой теоремы множества $a_i(x)$ являются телесными, т. е. $\operatorname{cl}\big(\operatorname{int}(a_i(x)\big)=\operatorname{cl}\big(a_i(x)\big)$. Для доказательства слабой выпуклости множества $a(x)$ достаточно доказать, что существует $L>0$ такое, что для любых векторов $y_1,y_2\in \operatorname{bdry}\big(a_i(x)\big)$, $p_1\in N_{(a_i(x))}(y_1)$, $p_2\in N_{(a_i(x))}(y_2)$ таких, что $\|p_1\|=\|p_2\|=1$ выполнено неравенство

$$\|p_1-p_2\|\le L\|y_1-y_2\|. \tag{2.1}$$

(см. [4, теорема 1.10.2, с. 85]). Здесь $N_{(a_i(x))}(y_j)$ ($j=1,2$) — нормальный конус Булигана к множеству $a_i(x)$ в точке y_j. В нашем случае

$$p_j=\frac{f'_{iy}(x,y_j)}{\|f'_{iy}(x,y_j)\|},\quad j=1,2.$$

Проверим выполнение условия (2.1). Имеем

$$\begin{aligned}\|p_1-p_2\|=\|\frac{f'_{iy}(x,y_1)}{\|f'_{iy}(x,y_1)}-\frac{f'_{iy}(x,y_2)}{\|f'_{iy}(x,y_2)\|}\|=\|\frac{\|f'_{iy}(x,y_2)\|f'_{iy}(x,y_1)-\|f'_{iy}(x,y_1)\|f'_{iy}(x,y_2)}{\|f'_{iy}(x,y_1)\|\|f'_{iy}(x,y_2)\|}\|\\ \le\frac{1}{m^2}(\|f'_{iy}(x,y_2)\|\|f'_{iy}(x,y_1)-f'_{iy}(x,y_2)\|+\|f'_{iy}(x,y_1)\|\|f'_{iy}(x,y_1)-f'_{iy}(x,y_2)\|\\ \le\frac{C_1L_1}{m^2}\|y_1-y_2\|,\end{aligned}$$

где

$$C_1=\max_{(x,y)\in X\times\Omega,\,i\in I}\|f'_{iy}(x,y)\|,\quad m=\min_{(x,y)\in X\times\Omega,\,i\in I}\|f'_{iy}(x,y)\|>0.$$

Следовательно, коэффициент L в условии (2.1) можно принять равным $L=C_1L_1/m^2$.

Для того, чтобы проверить, что множества $a(x)$, $x\in X$, являются проксимально гладкими с некоторой константой $R>0$, достаточно показать (см. [15, теорема 2.1]), что для любых $y_1,y_2\in a(x)$ и для любых $y_1^*\in N_{a(x)}(y_1)$, $y_2^*\in N_{a(x)}(y_2)$, имеет место неравенство

$$\big(y_1^*-y_2^*,y_1-y_2\big)\ge-\frac12\Big(\frac{\|y_1^*\|}{R}+\frac{\|y_2^*\|}{R}\Big)\|y_1-y_2\|^2. \tag{2.2}$$

В условиях теоремы любой вектор $y^* \in N_{a(x)}(y)$ представим в виде

$$y^* = \sum_{i \in I} \lambda_i f'_{iy}(x,y) + z^*, \quad \lambda_i \ge 0, \quad z^* \in N_Y(y),$$

причем $\lambda_i = 0$, если $i \notin I(x,y)$. Отсюда, если $p(x,y) \in N_{a(x)}(y)$, $\|p(x,y)\| = 1$, то существуют числа $\lambda_i(x,y) \ge 0$, $i \in I$, и вектор $y^*(x,y) \in N_Y(y)$ такие, что

$$p(x,y) = \sum_{i \in I} \lambda_i(x,y) f'_{iy}(x,y) + y^*(x,y). \tag{2.3}$$

Покажем, что существует число $M > 0$ такое, что

$$h(x,y) \equiv \sum_{i \in I} \lambda_i(x,y) + \|y^*(x,y)\| \le M \quad \forall (x,y) \in \operatorname{graf}(a).$$

Предположим противное, т. е. существует последовательность $\{(x_k, y_k)\} \subset \operatorname{graf}(a)$ такая, что $h(x_k, y_k) \to +\infty$. Определим

$$\alpha_i(x_k,y_k) = \frac{\lambda_i(x_k,y_k)}{h(x_k,y_k)}, \quad i \in I, \ \text{ и } \ e^*(x_k,y_k) = \frac{y_k^*}{\|y_k^*\|}, \quad \bigl(\, y_k^* = y^*(x_k,y_k) \,\bigr).$$

Из (2.3) получаем

$$\frac{p(x_k,y_k)}{h(x_k,y_k)} = \sum_{i \in I} \alpha_i(x_k,y_k) f'_{iy}(x_k,y_k) + \frac{\|y_k^*\|}{h(x_k,y_k)} e^*(x_k,y_k). \tag{2.4}$$

Так как $\operatorname{graf}(a)$ — компакт и $\sum_{i \in I} \alpha_i(x_k,y_k) + \frac{\|y_k^*\|}{h(x_k,y_k)} = 1$, то можно утверждать, что

$$(x_k,y_k) \to (\overline{x},\overline{y}), \quad \alpha_i(x_k,y_k) \to \overline{\alpha_i} \ge 0, \quad \frac{\|y_k^*\|}{h(x_k,y_k)} \to \beta \ge 0, \quad e^*(x_k,y_k) \to \overline{e}, \quad \sum_{i \in I} \overline{\alpha_i} + \beta = 1.$$

Далее, для достаточно больших k выполнено $I(x_k,y_k) \subset I(\overline{x},\overline{y})$, и поэтому $\overline{\alpha_i} = 0$, если $i \notin I(\overline{x},\overline{y})$. Отсюда, переходя к пределу в соотношении (2.4), получаем

$$\sum_{i \in I(\overline{x},\overline{y})} \overline{\alpha_i} f'_{iy}(\overline{x},\overline{y}) + \beta \overline{e} = 0 \quad \bigl(\, \|\overline{e}\| = 1 \,\bigr),$$

что противоречит предположению 4) теоремы.

Теперь покажем, что множества $a(x)$ являются слабо выпуклыми. Поскольку множества $a_i(x)$, $i \in I$, и Y слабо выпуклы с константой $\frac{1}{L}$, то из (2.2) следует, что для любых $y_1, y_2 \in a_i(x)$, $i \in I$ выполнено

$$\begin{aligned}
&\bigl(\lambda_i(x,y_1) f'_{iy}(x,y_1) - \lambda_i(x,y_2) f'_{iy}(x,y_2), y_1 - y_2\bigr) \\
&\ge -\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\lambda_i(x,y_1)\|f'_{iy}(x,y_1)\|}{L} + \frac{\lambda_i(x,y_2)\|f'_{iy}(x,y_2)\|}{L}\Bigr)\|y_1 - y_2\|^2, \\
&\bigl(y^*(x,y_1) - y^*(x,y_2), y_1 - y_2\bigr) \ge -\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\|y^*(x,y_1)\|}{L} + \frac{\|y^*(x,y_2)\|}{L}\Bigr).
\end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\big(p(x,y_1)-p(x,y_2),y_1-y_2\big) \geq -\frac{1}{2L}\Big(\sum_{i\in I}\lambda_i(x,y_1)\|f'_{iy}(x,y_1)\| + \|y^*(x,y_1)\|$$

$$+\sum_{i\in I}\lambda_i(x,y_2)\|f'_{iy}(x,y_2)\| + \|y^*(x,y_2)\|\Big)\|y_1-y_2\|^2 \geq -\frac{1}{L}M\tilde{M}\|y_1-y_2\|^2,$$

где

$$\tilde{M} = \max\Big\{\max_{(x,y)\in\mathrm{graf}(a),\ i\in I}\|f'_{iy}(x,y)\|,1\Big\}.$$

Согласно [4, теорема 1.9.2], отсюда следует, что множества $a(x)$ являются слабо выпуклыми с константой $R = L/(M\tilde{M})$.

Далее, согласно лемме 2.1 многозначное отображение a с компактными значениями непрерывно в любой точке $x \in X$. А так как множество X компактно, оно равномерно непрерывно по Хаусдорфу на X. Так что выполнены все предположения теоремы 0.1, согласно которой через любую точку $(x_0,y_0) \in \mathrm{graf}(a)$ проходит непрерывная селекция отображения a. □

Приведем пример многозначного отображения, удовлетворяющий условиям теоремы 2.1.

П р и м е р 2.1. Пусть $X = [0,1/4]$, $Y \subset \mathbb{R}^2$ — квадрат с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$. Рассмотрим функции

$$f_1(x,y_1,y_2) \equiv -(y_1-x)^2-y_2^2+1, \quad f_2(x,y_1,y_2) \equiv -(y_1-x-1)^2-y_2^2+1, \quad x\in X, \quad (y_1,y_2)\in Y.$$

Нетрудно проверить, что для этих функций многозначное отображение

$$a(x) \equiv \big\{y=(y_1,y_2)\in Y \mid f_1(x,y_1,y_2)\leq 0,\ f_2(x,y_1,y_2)\leq 0\big\}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1.

Теорема 2.2 (2-я теорема о непрерывной селекции). *Пусть*

1) $X\subset\mathbb{R}^m$ — компакт, $Y\subset\mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — открытое множество;

2) функции $f_i(x,y)$, $i\in I$, заданы на $X\times\Omega\subset\mathbb{R}^{n+m}$;

3) градиенты $f'_{iy}(x,y)$, $i\in I$, непрерывны по совокупности переменных $(x,y)\in X\times\Omega$, и существует число $L_1>0$ такое, что

$$\|f'_{iy}(x,y_1)-f'_{iy}(x,y_2)\| \leq L_1\|y_1-y_2\| \quad \forall x\in X, \quad \forall y_1,y_2\in Y, \quad i\in I;$$

4) для любого $x\in X$ существует $z\in Y$ такой, что

$$f_i(x,z) < -\frac{L_1}{2}(\mathrm{diam}(Y))^2, \quad i\in I. \tag{2.5}$$

Тогда через любую точку $(x_0,y_0)\in\mathrm{graf}(a)$ проходит непрерывная селекция многозначного отображения a.

Доказательство. Из (2.5), учитывая неравенство (1.1), получим, что для любых $x \in X$, $y \in Y$ найдется вектор $z \in Y$ такой, что

$$f_i(x,y) + \big(f'_{iy}(x,y), z - y\big) < 0, \quad i \in I. \tag{2.6}$$

Теперь, применяя рассуждения, аналогичные используемым в доказательстве леммы 1.4, установим, что существует непрерывное отображение $G : X \times Y \to Y$ такое, что

$$f_i(x,y) + \big(f'_{iy}(x,y), G(x,y) - y\big) < 0, \quad i \in I.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\max_{x\in X,\, y\in Y} \big\{f_i(x,y) + \big(f'_{iy}(x,y), G(x,y) - y\big)\big\} \equiv -\gamma < 0, \quad i \in I. \tag{2.7}$$

Свяжем с каждой точкой $(x,y) \in X \times Y$ следующую задачу квадратичного программирования:

$$\min_p \Big\{\frac{1}{2}\|p\|^2 \mid \big(f'_{iy}(x,y), p\big) + f_i(x,y) \le 0, \;\; p \in (Y - y), \;\; i \in I\Big\}. \tag{2.8}$$

Положим

$$A(x,y) = \big\{p \mid \big(f'_{iy}(x,y), p\big) + f_i(x,y) \le 0, \; i \in I\big\}, \quad B(y) = Y - y, \quad C(x,y) = A(x,y) \cap B(y).$$

Во-первых, заметим, что задача (2.8) имеет единственное решение, поскольку множество $C(x,y)$ решений ограничений этой задачи является непустым выпуклым и замкнутым. Обозначим это решение через $p(x,y)$. Во-вторых, многозначные отображения A и B, как уже указано выше, имеют выпуклые замкнутые значения и являются полунепрерывными снизу, и кроме того, согласно условию (2.6),

$$\mathrm{int} A(x,y) \cap B(y) \ne \emptyset.$$

Отсюда, в силу теоремы 1.3.9 из [11, с. 46] (о пересечении двух полунепрерывных снизу многозначных отображений) отображение C также будет полунепрерывным снизу. Из этих двух отмеченных фактов немедленно следует, что однозначное отображение $p(x,y)$ непрерывно по совокупности переменных (x,y).

Пусть $u_i(x,y)$, $i \in I$, множители Лагранжа задачи (2.8). Покажем, что существует число $N > 0$ такое, что

$$\sum_{i\in I} u_i(x,y) \le N \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y. \tag{2.9}$$

Действительно, согласно теории необходимых условий экстремума в задаче (2.8) должно выполняться следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\|p(x,y)\|^2 \le \frac{1}{2}\|p\|^2 + \sum_{i\in I} u_i(x,y)\big[\big(f'_{iy}(x,y), p\big) + f_i(x,y)\big], \quad y + p \in Y. \tag{2.10}$$

Отсюда и из (2.7) для $p = G(x,y) - y$ получаем

$$\sum_{i\in I} u_i(x,y) \le \frac{1}{2\gamma}\|p\|^2 \le \frac{1}{2\gamma}(\mathrm{diam}(Y))^2.$$

В неравенство (2.10) подставим $p=0$ и, учитывая неравенство (2.9), получим

$$\|p(x,y)\|^2 \le 2NF(x,y), \tag{2.11}$$

где

$$F(x,y) = \max_{i\in I}\{0, f_i(x,y)\}.$$

Пусть $\epsilon \in (0,1)$. Определим функциональную последовательность $\{y_k(x)\}$ следующим рекуррентным соотношением:

$$y_{k+1}(x) = y_k(x) + \overline{\alpha} p_k(x), \quad y_0(x) \equiv y_0,$$

где

$$p_k(x) \equiv p(x, y_k(x)), \quad \overline{\alpha} = \min\Big\{1, \frac{(1-\epsilon)}{2L_1N}\Big\}.$$

Нетрудно заметить, что $y_k(x) \in Y$ при всех k. Принимая во внимание неравенство (1.1) и тот факт, что $p_k(x)$ удовлетворяет ограничениям задачи (2.8), для $\alpha \in [0,1]$ получаем

$$f_i\big(x, y_k(x) + \alpha p_k(x)\big) \le (1-\alpha) f_i\big(x, y_k(x)\big) + \alpha^2 L_1 \|p_k(x)\|^2.$$

Отсюда и из (2.6) следует, что

$$F\big(x, y_k(x)+\alpha p_k(x)\big) \le (1-\alpha)F\big(x,y_k(x)\big) + \alpha^2 \frac{L_1}{2} N F\big(x, y_k(x)\big) = [1-\alpha+2\alpha^2 L_1 N] F\big(x, y_k(x)\big).$$

Поэтому при $\alpha = \overline{\alpha}$ имеет место неравенство

$$F\big(x, y_{k+1}(x)\big) \le (1-\overline{\alpha}\epsilon) F\big(x, y_k(x)\big).$$

Следовательно,

$$F(x, y_k(x)) \le (1-\overline{\alpha}\epsilon)^k F(x, y_0) \le (1-\overline{\alpha}\epsilon)^k C, \tag{2.12}$$

где $C = \max_{x\in X} F(x, y_0)$. Отсюда и из (2.11) получаем неравенство

$$\|p_k(x)\|^2 \le NC(1-\overline{\alpha}\epsilon)^k \quad \forall x \in X.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x)$ равномерно сходится. А так как

$$y_k(x) = y_0 + \overline{\alpha}\big(p_0(x) + p_1(x) + \ldots + p_{k-1}(x)\big) \quad (k \ge 2),$$

то последовательность $\{y_k(x)\}$ также равномерно сходится к некоторой функции $y(x)$. Заметим, что все члены $y_k(x)$ этой последовательности непрерывны и $y_k(x_0) = y_0$. Значит, отображение $y(x)$ также непрерывно и $y(x_0) = y_0$.

Таким образом, из (2.12) следует, что $F(x, y(x)) = 0$, т. е.

$$f_i(x, y(x)) \le 0 \text{ и } y(x) \in Y \quad \forall x \in X, \quad i \in I,$$

и отображение $y(x)$ является непрерывной селекцией отображения a. $\square$

Следствие 2.1. *Пусть функции* $g_i(x,y)$, $i \in I$, *являются выпуклыми по* y *и удовлетворяют условиям 1)–3) теоремы 2.2. Допустим также, что для любого* $x \in X$, *существует* $z \in Y$ *такой, что*

$$g_i(x,z) < 0, \quad i \in I. \tag{2.13}$$

Пусть

$$f_i(x,y) = g_i(x,y) - \frac{\beta}{2}\|y\|^2, \quad a_\beta(x) = \big\{y \in Y \mid f_i(x,y) \le 0, \ i \in I\big\}.$$

Тогда существует число $\delta > 0$ *такое, что при* $\beta \in [0,\delta)$ *многозначное отображение* $a_\beta(x)$ *имеет непрерывный селектор, проходящий через любою точку его графика.*

Доказательство. Как отмечено выше, функции $f_i(x,\cdot)$, $i \in I$, слабо выпуклы с константой β на выпуклом множестве Y. Это означает, что для любых $y_1, y_2 \in Y$, $\lambda \in [0,1]$ выполнено

$$f_i\big(x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\big) \le \lambda f_i(x,y_1) + (1-\lambda)f_i(x,y_2) + \lambda(1-\lambda)\frac{\beta}{2}\|y_1 - y_2\|^2.$$

Преобразуя эту формулу, а затем пользуясь дифференцируемостью f_i по y в точке y_2, получаем

$$\begin{aligned} f_i(x,y_1) - f_i(x,y_2) + \frac{\beta}{2}\lambda(1-\lambda)\|y_1 - y_2\|^2 &\ge \frac{f_i(x, y_2 + \lambda(y_1 - y_2) - f_i(x,y_2)}{\lambda} \\ &= (f'_{iy}(x,y_2), y_1 - y_2) + \frac{o(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получаем

$$f_i(x,y_2) + \big(f'_{iy}(x,y_2), y_1 - y_2\big) \le f_i(x,y_1) + \frac{\beta}{2}\|y_1 - y_2\|^2. \tag{2.14}$$

Из (2.13) следует, что существует отображение $D_1 : X \times Y \to Y$ и число $\overline{\gamma} > 0$ такие, что $g_i(x, D_1(x,y)) \le -\overline{\gamma}$, $i \in I$ (см. доказательство леммы 1.4). Отсюда

$$f_i(x, D_1(x,y)) + \frac{\beta}{2}(\operatorname{diam}(Y))^2 = g_i(x, D_1(x,y)) - \frac{\beta}{2}\|D_1(x,y)\|^2 + \frac{\beta}{2}(\operatorname{diam}(Y))^2. \tag{2.15}$$

Так как $g_i(x, D_1(x,y)) \le -\overline{\gamma}$, то выберем число β настолько малым, что правая часть неравенства (2.15) будет меньше нуля. Это означает, что для таких β выполняется условие (2.5) теоремы 2.2. Теперь, повторяя доказательство теоремы 2.2 (с использованием неравенства (2.14)) получаем, что через любую точку $(x_0, y_0) \in \operatorname{graf}(a_\beta)$ проходит непрерывная селекция отображения a. $\square$

Следствие 2.2. *Пусть*

1) $X \subset \mathbb{R}^m$ *— компакт,* $Y \subset \mathbb{R}^n$ *— выпуклый компакт;*

2) *функция* $g(x,y)$ *непрерывна по совокупности переменных* (x,y) *и выпукла по* y *на множестве* Y*;*

3) градиент $g'_y(x,y)$ *непрерывен по совокупности переменных, и существует число* $L>0$ *такое, что*

$$\|g'_y(x,y_1)-g'_y(x,y_2)\|\le L\|y_1-y_2\| \quad \forall x\in X \quad \forall y_1,y_2\in Y.$$

Для любых $\epsilon>0$, $\beta>0$ *положим*

$$f(x,y)=g(x,y)-\frac{\beta}{2}\|y\|^2; \quad a_\epsilon(x)=\big\{y\in Y \mid f(x,y)\le \min_{y\in Y} f(x,y)+\epsilon\big\}.$$

Тогда для достаточно малых $\beta>0$ *через любую точку графика отображения* a_ϵ *проходит непрерывная селекция этого отображения.*

В [16] подробно рассмотрен вопрос существования непрерывного селектора отображения a_ϵ, когда функция $f(x,y)$ выпукла по y.

Приведем пример многозначного отображения, удовлетворяющего условиям теоремы 2.2.

П р и м е р 2.2. Пусть $X\equiv[0,\frac{3\pi}{2}-1.7]\cup[2\pi,\frac{7\pi}{2}-1.7]$, $Y\subset\mathbb{R}^2$ — прямоугольник с вершинами $(\frac{3\pi}{2}-1.7,0)$, $(\frac{3\pi}{2},0)$, $(\frac{3\pi}{2}-1.7,1)$, $(\frac{3\pi}{2},1)$. Рассмотрим функцию

$$f(x,y)\equiv sin(y_1+x)-y_2, \quad x\in X, \quad y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Очевидно, что градиент $f'_y=\big(cos(x+y_1),-1\big)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L=1$. Проверим условие 4) теоремы 2.2. Имеем $(\mathrm{diam}(Y))^2=1+(1.7)^2=3.89$. Для любого $x\in X$ выберем точку $z=(z_1,z_2)\in Y$ следующим образом

$$z_1=\frac{3\pi}{2}-x, \quad z_2=1.$$

Очевидно, что $f(x,z)=-2$. Итак,

$$-f(x,z)=2>\frac{L}{2}(\mathrm{diam}(Y))^2=1.945,$$

т. е. выполнено условие 4) теоремы 2.2.

Заметим, что в этом примере множество X не выпукло, множества $a(x)$ являются проксимально гладкими.

Теперь приведем пример, иллюстрирующий существенность условия (2.5).

П р и м е р 2.3. Пусть $f(x,y)=1+cos(x+y)$. Рассмотрим множество

$$a_\epsilon(x)=\big\{y\in Y \mid f(x,y)\le\min_{y\in Y} f(x,y)+\epsilon\big\}, \quad \epsilon\in(0,1),$$

ϵ-оптимальных точек функции $f(x,\cdot)$ на множестве $Y=[0,2\pi]$.

Пусть $X=[0,\arccos(\epsilon-1)]$. Очевидно, что $\min_{y\in Y} f(x,y)=0$ при любом $x\in X$. Поэтому

$$a_\epsilon(x)=\big\{y\in Y \mid \cos(x+y)\le\epsilon-1\big\}.$$

Следовательно,

$$a_\epsilon(x)=\begin{cases}\big[\arccos(\epsilon-1)-x,\ 2\pi-\arccos(\epsilon-1)-x\big], & \text{если} \quad x\in[0,\arccos(\epsilon-1))\\ \big[0,\ 2\pi-2arccos(\epsilon-1)\big]\cup\{2\pi\}, & \text{если} \quad x=\mathrm{arcccos}(\epsilon-1).\end{cases}$$

Очевидно, что рассматриваемое отображение a_ϵ не имеет непрерывного селектора, проходящего через точку $(arccos(\epsilon-1), 2\pi)$.

Так как для любого $x \in X$ функция $cos(x+y)$ слабо выпукла с константой $L=1$ и $\mathrm{diam}(Y)=2\pi$, условие (2.5) явно не имеет места.

Автор благодарен Максиму Викторовичу Балашову за полезные дискуссии о слабо выпуклых множествах.

References

[1] R. T. Rockafellar, J. B. Wets, *Variation Analysis*, Springer, New York, 2009.

[2] E. Michael, "Continous Selection 1", *Ann. Math.*, 1956, № 63, 361–381.

[3] М. В. Балашов, Г. Е. Иванов, "Слабо выпуклые и аппксимально гладкие множества в банаховых пространствах", *Изв. РАН, Матем.*, **73**:3 (2009), 23–66. [M. V. Balashov, G. E. Ivanov, "Weakly convex and proksimally smooth sets in Banach space", *Izwestiya: Mathematics*, **73**:3 (2009), 23–66 (in Russian)].

[4] Г. Е. Иванов, *Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения*, Физматлит, М., 2006. [G. E. Ivanov, *Weakly convex functions and sets: theory and applications*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian)].

[5] F. H. Clarke, R. J. Stern, P. R. Wolenski, "Proximal smoothness and lowee-C^2 property", *Convex Anal.*, **2**:1 (1085), 231–259.

[6] В. В. Остапенко, "Об одном условии почти выпуклости", *Укр. матем. журнал*, **35**:2 (1983), 163–172. [V. V. Ostapenko, "On one condition of almost convexity", *Ukrainian Math. Journal*, **35**:2 (1983), 163–172 (in Russian)].

[7] Р. А. Хачатрян, "О непрерывных селекциях многозначного отображения с почти выпуклыми значениями", *Изв. НАН Армении. Математика*, **54**:1 (2019), 60–75. [R. A. Khachatryan, "On continuous selections of a multivalued mapping with almost convex values", *Izv. NAN Armenia. Mathematics*, **54**:1 (2019), 60–75 (in Russian)].

[8] Б. Н. Пшеничный, *Методы линеаризации*, Наука, М., 1980. [B. N. Pshenichny, *Linearization Method*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (In Russian)].

[9] Р. А. Хачатрян, "О производных по направлению селекций многозначных отображений", *Изв. НАН Армении. Математика*, **54**:3 (2016), 64–82. [R. A. Khachatryan, "On derivatives with respect to the direction of selections of multivalued mappings", *Izv. NAN Armenia. Mathematics*, **54**:3 (2016), 64–82 (in Russian)].

[10] Б. Н. Пшеничный, *Выпуклый анализ и экстремальные задачи*, Наука, М., 1980. [B. N. Pshenichny, *Convex Analysis and Extremal Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].

[11] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, URSS, М., 2005, 216 с. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovsky, *Inrodiction to the Theory of Multivalued Mappins and Differential Inclusions*, URSS Publ., Moscow, 2005 (In Russian), 216 pp.]

[12] Ю. Е. Нестеров, *Методы выпуклой оптимизации*, МЦНМО, М., 2010. [Yu. E. Nesterov, *Convex optimization methods*, ICCMMO Publ., Moscow, 2010 (In Russian)].

[13] В. В. Остапенко, Е. В. Остапенко, С. Н. Амиргалиева, "Приближенные методы пешения дифференциальных игр со случайной помехой", *System Researsh and information Technologies*, 2005, № 4, 65–74. [V. V. Ostapenko, E. V. Ostapenko, S. N. Amigalieva, "Approximate methods for solving differntial gaims with random nois", *System Researsh and information Technologies*, 2005, № 4, 65–74 (in Russian)].

[14] Б. Ш. Мордухович, *Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления*, Наука, М., 1988. [B. Sh. Mordukhovish, *Approximation Methods in Optimization and Control Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1988].

[15] S. Adly, F. Nacry, L. Thibault, "Discontinous sweeping process with prox-regular sets", *ESAIM: Contol, Optimization and Calculus of Variations*, **23** (2017), 1293–1329.

[16] Р. А. Хачатрян, “О существовании непрерывных селекций многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:139 (2022), 284–299. [R. A. Khachatryan, “On the existence of continuous selections of a multivalued mapping related to the problem of minimizing a functional”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:139 (2022), 284–299 (in Russian)].

Информация об авторе

Хачатрян Рафик Агасиевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры численного анализа и математического моделирования, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Армения. E-mail: khrafik@ysu.am
ORCID: https//orcid.org/0000-0002-7908-0562

Поступила в редакцию 22.06.2023 г.
Поступила после рецензирования 13.11.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

Information about the author

Rafik A. Khachatryan, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Numerical Analysis and Mathematical Modeling Department, Yerevan State University, Yerevan, Armenia. E-mail: khrafik@ysu.am
ORCID: https//orcid.org/0000-0002-7908-0562

Received 22.06.2023
Reviewed 13.11.2023
Accepted for press 23.11.2023